ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HOÀNG GIANG

ĐỒNG QUY VÀ THẲNG HÀNG TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HOÀNG GIANG

ĐỒNG QUY VÀ THẲNG HÀNG TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Nguyễn Văn Ngọc

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Lời cảm ơn **1**

Mở đầu **2**

Chương 1 Các khái niệm và định lý cơ bản của hình học phẳng **4**

1.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác 4
1.2. Định lý Thales và định lý Pythagoras 5
1.2.1. Định lý Thales 5
1.2.2. Định lý Pythagoras 6
1.3. Định lý hàm số sin và định lý hàm số cosin 7
1.3.1. Định lý hàm số sin 7
1.3.2. Định lý hàm số cosin 8
1.4. Định lý Stewart 9
1.5. Định lý đường trung tuyến 10
1.6. Định lý về đường phân giác 11
1.7. Công thức góc chia đôi 12
1.8. Công thức về diện tích của tam giác 14
1.9. Tỉ số diện tích hai tam giác 16
1.10. Đường thẳng Euler 16

Chương 2 Đồng quy của các đường thẳng **18**

2.1. Các điểm đặc biệt nổi tiếng trong tam giác 18
2.1.1. Các điểm đặc biệt quen biết 18
2.1.2. Một số điểm đặc biệt khác 19
2.2. Định lý Ceva 20
2.3. Một số mở rộng của định lý Ceva trong mặt phẳng 21
2.3.1. Định lý Ceva dạng sin 21
2.3.2. Mở rộng định lý Ceva trong mặt phẳng 22
2.4. Bài toán 24

Chương 3 Các điểm thẳng hàng **34**
3.1. Định lý Pascal và Định lý Simson 34
3.1.1. Định lý Pascal 34
3.1.2. Định lí Simson 35
3.2. Định lý Menelaus 36
3.3. Mở rộng định lý Menelaus trong mặt phẳng 37
3.3.1. Mở rộng định lý Menelaus trong tam giác 37
3.3.2. Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích 38
3.3.3. Mở rộng Định lý Menelaus trong tứ giác 39
3.4. Định lý Desargues và Định lý Pappus 39
3.4.1. Định lý Desargues 39
3.4.2. Định lý Pappus 40
3.5. Tam giác phối cảnh 40
3.6. Bài toán 41
3.7. Một số phương pháp chứng minh quan hệ đồng quy và thẳng hàng 47
3.7.1. Phương pháp vectơ 47
3.7.2. Phương pháp quỹ tích 53
3.7.3. Phương pháp biến hình 58

Kết luận **61**

Tài liệu tham khảo **62**

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới người Thầy kính mến TS. Nguyễn Văn Ngọc, đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ em trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn.

Em xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học, những người đã trực tiếp giảng dạy và giúp đỡ em trong quá trình học tập tại Trường.

Em xin cảm ơn bạn bè và các học viên trong lớp cao học toán K10C Thái Nguyên đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ em trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Sự quan tâm, động viên và khích lệ của gia đình cũng là nguồn động viên lớn để em hoàn thành khóa luận này. Cùng toàn thể bạn bè và người thân đã đóng góp ý kiến, giúp đỡ, động viên em trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và trong khuôn khổ của luận văn thạc sỹ nên bản luận văn mới chỉ trình bày được một phần nào đó. Do thời gian có hạn và năng lực có phần hạn chế nên chắc chắn luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Em xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018
Người viết luận văn

Nguyễn Thị Hoàng Giang

Mở đầu

Dạng toán về đồng quy của các đường thẳng và thẳng hàng của các điểm là những dạng toán cơ bản của môn hình học. Những dạng toán này thường là khó đối với phần lớn các học sinh, kể cả những học sinh khá giỏi. Kiến thức lý thuyết về phương pháp nghiên cứu những dạng toán này hầu như chưa có, mà chủ yếu dựa vào kinh nghiệm cũng như tư duy giải toán của mỗi người.

Các tài liệu về đồng quy và thẳng hàng trong hình học phẳng xuất hiện dưới nhiều tài liệu tổng hợp từ các chuyên gia quốc tế, như của Kim Y.Li [4], Heather Macbeth [5], V.Prasolov [6], Po-Shen Loh [7], Wong Yan Loi [8]. Ở trong nước cũng có những nghiên cứu liên quan đến vấn đề toán học về đồng quy và thẳng hàng trong hình học phẳng của các nhà toán học như Vi Quốc Dũng [1], Nguyễn Văn Nho [2], Nguyễn Đăng Phất [3]. Qua đó, chúng ta có thể thấy sự thú vị và quan trọng của chủ đề này trong toán học đối với giáo viên dạy phổ thông và học sinh phổ thông yêu thích hình học. Tìm hiểu và học tập về tính đồng quy và thẳng hàng trong hình học phẳng là cần thiết cho việc nâng cao kiến thức của giáo viên trong công việc giảng dạy và bồi dưỡng cho học sinh ở các trường THPT. Do đó em chọn chủ đề "**Đồng quy và thẳng hàng trong hình học phẳng**" để làm đề tài luận văn cao học.

Luận văn có bố cục mở đầu, ba chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Các khái niệm và định lý cơ bản của hình học phẳng. Nội dung chương nêu ra một số khái niệm và định lý cơ bản của hình học phẳng.

Chương 2: Đồng quy của các đường thẳng. Trong chương này em xin trình bày các kiến thức về đường thẳng đồng quy, đặc biệt là định lý Ceva với các mở rộng trên mặt phẳng. Ngoài ra còn giới thiệu một số điểm đặc biệt trong tam giác được tạo nên bởi các đường thẳng đặc biệt đồng

quy và một số bài toán tiêu biểu.

Chương 3: Thẳng hàng và đồng quy. Chương này trình bày các kiến thức liên quan đến các điểm thẳng hàng và một số định lý tiêu biểu, cũng như một số phương pháp chứng minh quan hệ đồng quy và thẳng hàng.

Chương 1

Các khái niệm và định lý cơ bản của hình học phẳng

Trong chương này, đầu tiên em trình bày các kí hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác. Sau đó em trình bày một số định lý cơ bản của hình học phẳng. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [2, 4].

1.1. Ký hiệu và hệ thức cơ bản trong tam giác

Kí hiệu ΔABC là tam giác ABC với các đỉnh là A, B, C. Để thuận tiện, độ lớn của các góc ứng với các đỉnh A, B, C cũng được kí hiệu tương ứng là A, B, C.

Độ dài các cạnh của tam giác: $BC = a, CA = b, AB = c$.

Nửa chu vi của tam giác: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Đường cao với các cạnh: h_a, h_b, h_c.

Đường trung tuyến với các cạnh: m_a, m_b, m_c.

Đường phân giác với các cạnh: l_a, l_b, l_c.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp R, bán kính đường tròn nội tiếp r.

Bán kính đường tròn bàng tiếp các cạnh: R_a, R_b, R_c.

Diện tích tam giác ABC: $S = S_{ABC}$ hay $[ABC]$.

Hệ thức về góc:

$$A + B + C = 180^o(\pi).$$

Hệ thức về cạnh:

$$|b - c| < a < b + c; \quad |c - a| < b < c + a; \quad |a - b| < c < a + b.$$

Công thức tính diện tích tam giác. Diện tích tam giác bằng một nửa tích của một cạnh với đường cao tương ứng:

$$[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

1.2. Định lý Thales và định lý Pythagoras

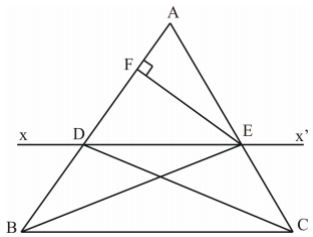
1.2.1. Định lý Thales

Định nghĩa 1.2.1. Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng $A'B'$ và $C'D'$ nếu có tỉ lệ thức

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{hay} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}. \tag{1.1}$$

Định lý 1.2.1. *(Định lý Thales trong tam giác). Nếu một đường cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh còn lại những đoạn thẳng tỉ lệ.*

Chứng minh. Xét tam giác ABC và giả sử đường thẳng $xx'//BC$, cắt



Hình 1.1:

cạnh AB và AC tương ứng tại D và E. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}. \tag{1.2}$$

Vì DE song song với BC, nên diện tích tam giác DEB bằng diện tích tam giác DEC. Trong tam giác ABE kẻ đường cao EF. Khi đó

$$\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{\frac{1}{2}AD.EF}{\frac{1}{2}BD.EF} = \frac{AD}{BD}. \tag{1.3}$$

Tương tự ta có

$$\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{AE}{CE}. \tag{1.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) suy ra hệ thức (1.2). □

Định lý 1.2.2. *(Định lý Thalet đảo) Nếu một đường cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.*

Chứng minh. Giả sử đường thẳng xx' cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC theo thứ tự tại D và E, sao cho $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$.

Ta phải chứng minh $DE//BC$.

Qua D kẻ đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AC tại điểm E'. Theo định lý thuận ta có $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AE'}{E'C} \quad \Rightarrow \dfrac{AE'}{E'C} = \dfrac{AE}{EC}$

$$\Leftrightarrow \frac{AE'}{E'C} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1 \Leftrightarrow \frac{AE' + E'C}{E'C} = \frac{AE + EC}{EC} \Leftrightarrow \frac{AC}{E'C} = \frac{AC}{EC},$$

hay $E'C = EC'$, tức là $E \equiv E'$. Do đó $DE//BC$. □

Hệ quả 1.2.1. *Nhiều đường thẳng song song định ra trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.*

1.2.2. Định lý Pythagoras

Định nghĩa 1.2.2. Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông. Cạnh đối diện với góc vuông được gọi là cạnh huyền, hai cạnh kề góc vuông được gọi là hai cạnh kề hay hai cạnh góc vuông.

Định lý 1.2.3. *(Định lý Pythagoras thuận) Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông. Nếu tam giác ABC vuông tại A thì $a^2 = b^2 + c^2$.*

Chứng minh.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $b \geq c$. Dựng hình vuông $BCPQ$ có độ dài các cạnh bằng a, dựng vào bên trong hình vuông 4 tam giác vuông bằng tam giác vuông ABC.